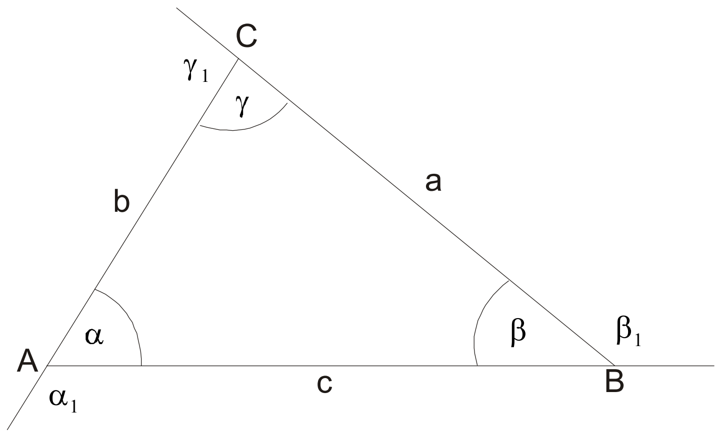
TROUGAO (PRIMENA PITAGORINE TEOREME)

Mnogougao koji ima tri stranice zove se **trougao.** Osnovni elementi trougla su :

- Temena A,B,C
- Stranice a,b,c (po dogovoru stranice se obeležavaju nasuprot temenu, npr naspram temena A je stranica a, itd)
- Uglovi , unutrašnji α, β, γ i spoljašnji α_1, β_1 , γ_1



Osnovne relacije za uglove i stranice trougla su:

1) Zbir unutrašnjih uglova u trouglu je 180^0 tj. $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$

2) Zbir spoljašnjih uglova je 360^0 tj. $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^0$

3) Spoljašnji i njemu susedni unutrašnji ugao su uporedni,tj.

$$\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1 = \gamma + \gamma_1 = 180^0$$

4) Spoljašnji ugao trougla jednak je zbiru dva nesusedna unutrašnja ugla, tj

$$\alpha_1 = \beta + \gamma \qquad \beta_1 = \alpha + \gamma \qquad \gamma_1 = \alpha + \beta$$

5) Svaka stranica trougla manja je od zbira a veća od razlike druge dve stranice, tj

$$|a-b| < c < a+b$$
$$|a-c| < b < a+c$$
$$|b-c| < a < b+c$$

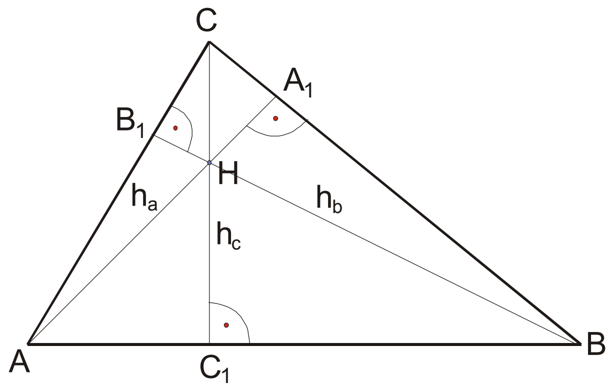
6) Naspram većeg ugla nalazi se veća stranica i obrnuto.

Ako je $\alpha = \beta$ onda je a = b
Ako je a = b onda je $\alpha = \beta$

Četiri značajne tačke trougla su:

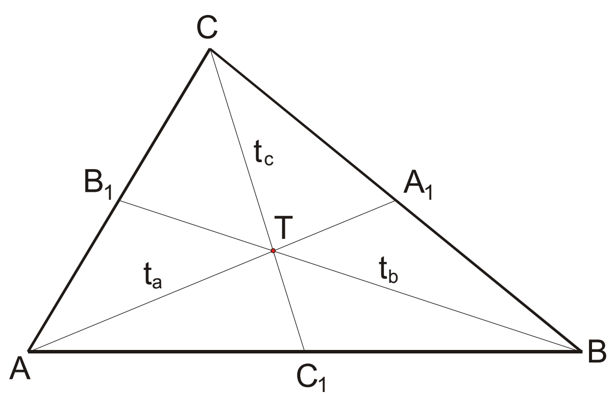
1) Ortocentar (H)
2) Težiste (T)
3) Centar upisane kružnice (S)
4) Centar opisane kružnice (O)

Ortocentar se nalazi u preseku visina trougla h_a,h_b,h_c. (Visina je najkraće rastojanje od temena do naspramne stranice). Kod oštrouglog trougla je u trouglu, kod pravouglog u temenu pravog ugla a kod tupouglog van trougla.



$\mathbf{h_a \cap h_b \cap h_c = H}$ **Ortocentar**

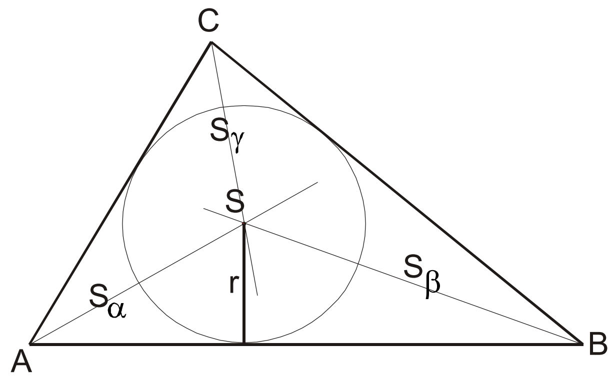
Težišna duž trougla je duž koja spaja teme sa sredinom naspramne stranice. Težišne duži seku se u jednoj tački , a to je **TEŽIŠTE TROUGLA.** Težište deli težišnu duž u razmeri 2:1.



$t_a \cap t_b \cap t_c = T$

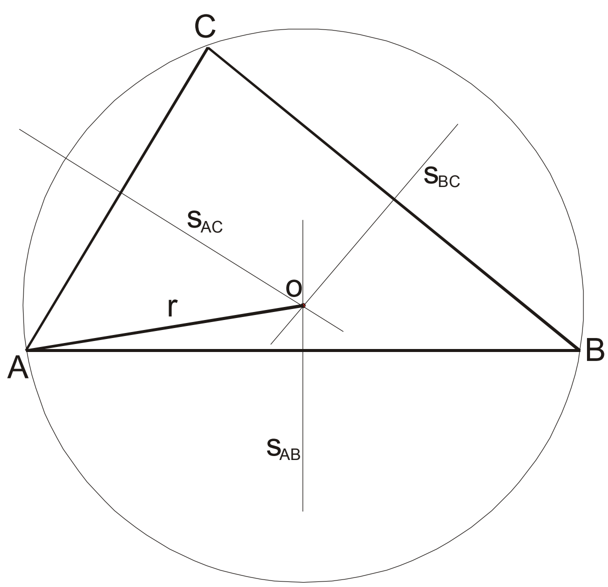
$$AT : TA_1 = 2 : 1$$
$$BT : TB_1 = 2 : 1$$
$$CT : TC_1 = 2 : 1$$

Centar upisane kružnice je tačka preseka simetrala uglova i kod svih trouglova je u oblasti trougla.



$$s_\alpha \cap s_\beta \cap s_\gamma = S$$

Centar opisane kružnice je tačka preseka simetrala stranica. Kod oštrouglog trougla je u trouglu, kod pravouglog na sredini hipotenuze i kod tupouglog van trougla.



$$s_{AB} \cap s_{AC} \cap s_{BC} = O$$

Vrste trouglova:

Trouglovi se dele prema “stranicama” i prema “uglovima”.

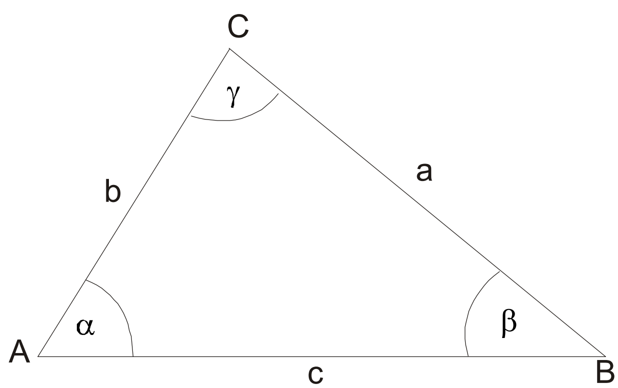
Prema stranicama:

1) jednakostranični
2) jednakokraki
3) nejednakostranični

Prema uglovima:

1) oštrougli
2) pravougli
3) tupougli

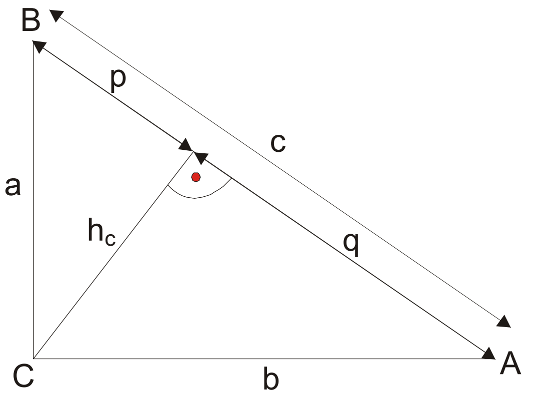
Nejednakostranični



O = a + b + c

$$P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$$

Pravougli:



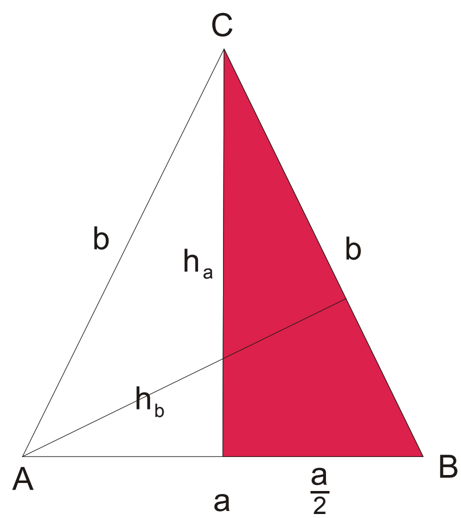
O = a + b + c

$P=\frac{ab}{2}$ ili $P=\frac{ch_c}{2}$ odavde je: $h_c = \frac{a \cdot b}{c}$

$a^2 + b^2 = c^2$ **Pitagorina teorema**

$R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $h_c = \sqrt{pq}$; $a = \sqrt{pc}$; $b = \sqrt{qc}$; $c = p+q$

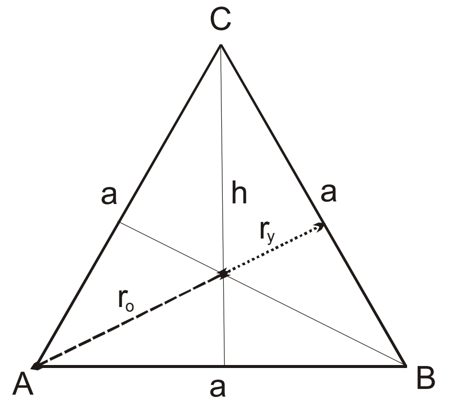
Jednakokraki :



Ovde je a osnova i b krak (kraci)

O = a + 2b $P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}$ Primena Pitagorine teoreme: $h_a^2+(\frac{a}{2})^2= b^2$

Jednakostranični:

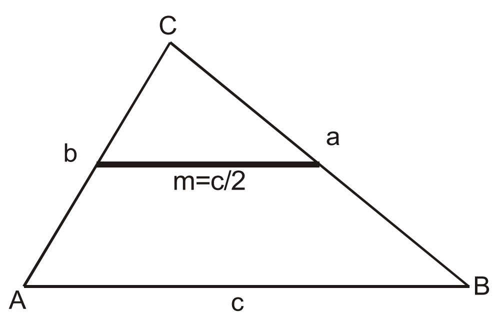


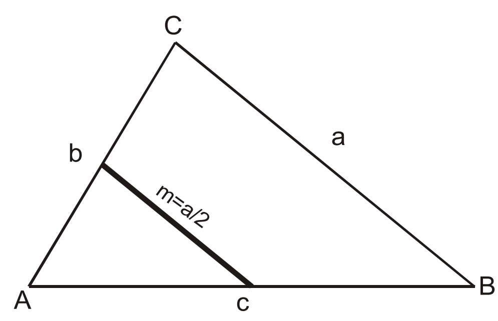
O = 3a i $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

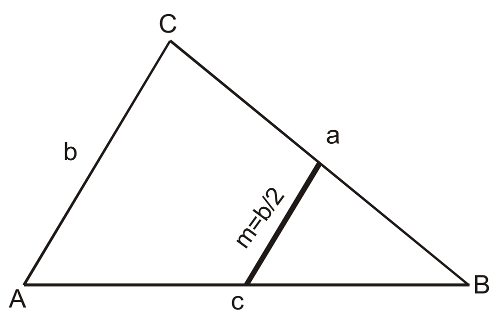
Visina $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $r_y = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $r_o = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Kod ovog trougla sve četiri značajne tačke se nalaze u jednoj tački.

Srednja linija trougla **(m) je duž koja spaja sredine dve stranice i uvek je jednaka polovini paralelne stranice.**







Podudarnost

$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$

(SSS) Ako su sve stranice jednog trougla jednake odgovarajućim stranicama drugog trougla.

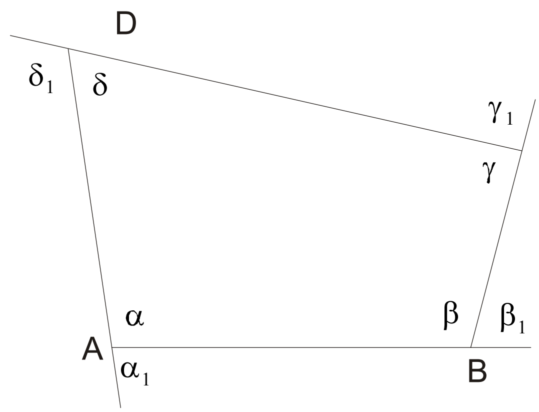
(SUS) Ako su dve stranice i zahvaćeni ugao jednog trougla jednaki dvema stranicama i zahvaćenom uglu drugog trougla.

(USU) Ako su stranica i na nju nalegli uglovi jednog trougla jednaki sa stranicom i na nju naleglim uglovima drugog trougla.

(SSU) Ako su dve stranice i ugao naspram veće od njih jednog trougla jednaki dvema stranicama i uglu naspram veće od njih drugog trougla.

ČETVOROUGAO (PRIMENA PITAGORINE TEOREME)

Mnogougao koji ima četiri stranice naziva se četvorougao.

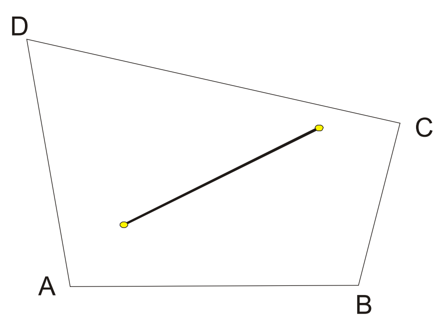


Za svaki četvorougao važi da im je zbir unutrašnjih i spoljašnjih uglova isti i iznosi 360^0

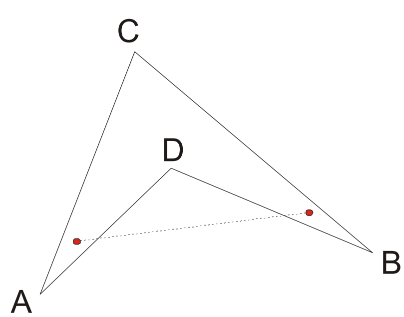
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0 \qquad \alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=360^0$$

Najpre da kažemo da četvorouglovi mogu biti : **konveksni** i **nekonveksni**.

Četvorougao je **konveksan** ako duž koja spaja bilo koje dve tačke unutrašnje oblasti ostaje unutar četvorougla.



Četvorougao je **nekonveksan** ako duž koja spaja bilo koje dve tačke unutrašnje oblasti izlazi iz nje.



Podela četvorouglova može se izvršiti na više načina.Prvu podelu izvršio je još Euklid.

On ih je podelio u pet grupa: kvadrati, pravougaonici,rombovi,romboidi i trapezi.

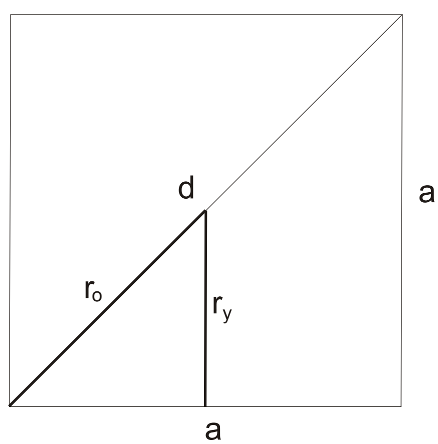
Međutim, danas je podela izvršena na sledeći način:

1) **Paralelogrami** (imaju po dva para paralelnih stranica)
2) **Trapezi** (imaju jedan par paralelnih stranica)
3) **Trapezoidi** (nemaju paralelne stranice)

Paralelogram je četvorougao čije su naspramne stranice paralelne.

KVADRAT

- Sva četiri ugla su mu prava
- Sve stranice su jednake
- Dijagonale su jednake i međusobno se polove pod pravim uglom
- Centralno simetrična je figura
- Ima 4 ose simetrije



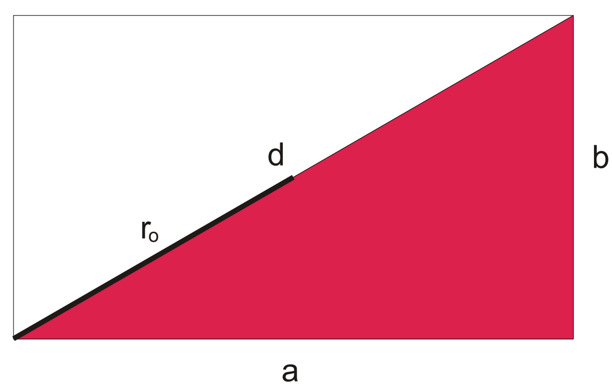
O= 4a

P = a^2 ili $P = \frac{d^2}{2}$, $r_y = \frac{a}{2}$ i $r_o = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

d=a$\sqrt{2}$ i ako nam treba dužina stranice a imamo dužinu dijagonale $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$

PRAVOUGAONIK

- Sva četiri ugla su mu prava
- Paralelne stranice su jednake
- Dijagonale su jednake i međusobno se polove
- Centralnosimetrična figura
- Ima 2 ose simetrije



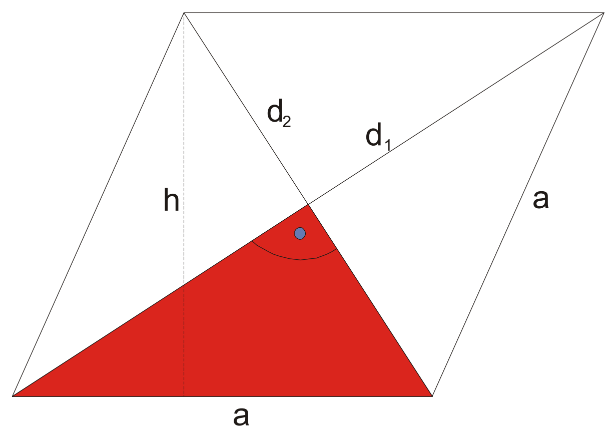
O = 2a + 2b

P = ab

$r_o = \frac{d}{2}$ a dijagonalu nalazimo iz Pitagorine teoreme: $d^2 = a^2 + b^2$

ROMB

- Sve četiri stanice su jednake
- Naspramni uglovi su jednaki a uzastopni su suplementni
- Dijagonale se međusobno polove pod pravim uglom
- Centralnosimetrična figura
- Ima dve ose simetrije



O = 4a

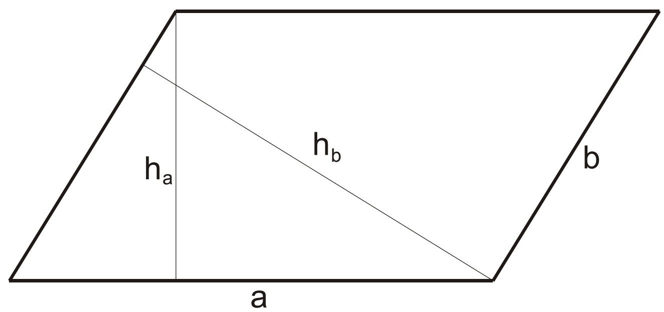
$P=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ ili P = ah

Može se upisati kružnica čiji je poluprečnik $r_y = \frac{h}{2}$

Pitagorina teorema se primenjuje na osenčeni trougao: $a^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2$

ROMBOID

- Paralelne stranice su jednake
- Naspramni uglovi su jednaki a uzastopni su suplementni
- Dijagonale se međusobno polove
- Centralnosimetrična figura



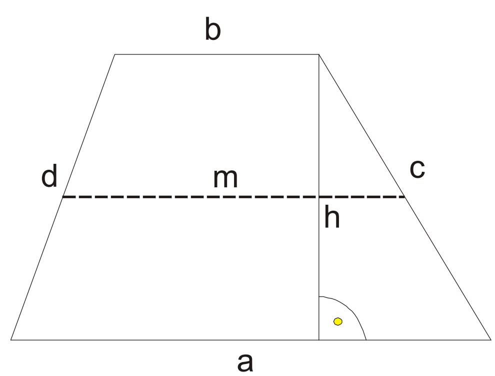
O = 2a + 2b

P= ah_a ili   P= bh_b

Ne može da se upiše niti da se opiše kružnica .

Četvorougao čije su samo dve naspramne stranice paralelne zove se TRAPEZ.

Paralelne stranice se zovu osnovice, a druge dve kraci.

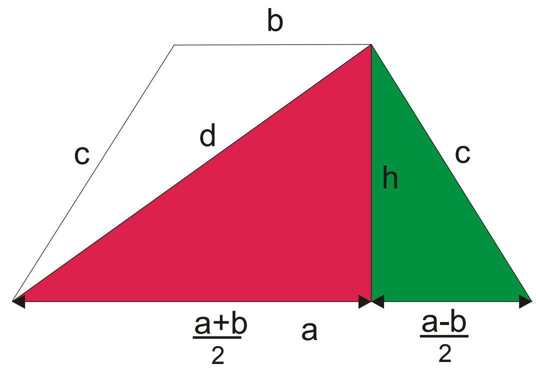


Stranice a i b su osnovice, c i d kraci. Duž koja spaja središta krakova je srednja linija

trapeza $m = \frac{a+b}{2}$. Naravno m je paralelna i sa a i sa b.

O = a+b+c+d ; $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ ili   P = mh

JEDNAKOKRAKI TRAPEZ



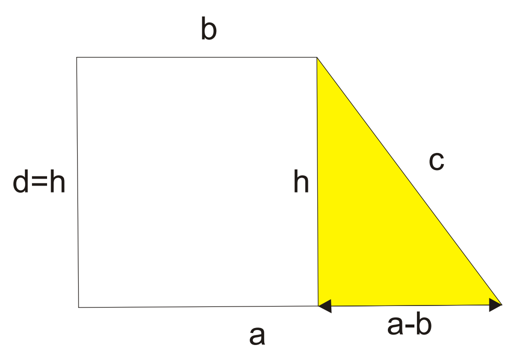
O = a + b + 2c

P= $\frac{a+b}{2}\cdot$ h ili P = mh

Primena Pitagorine teoreme: $(\frac{a-b}{2})^2 + h^2 = c^2$ (na zeleni trougao)

$(\frac{a+b}{2})^2 + h^2 = d^2$ (na crveni trougao)

PRAVOUGLI TRAPEZ



O = a + b + c + h

P= $\frac{a+b}{2}\cdot$ h ili P = mh

Primena Pitagorine teoreme: $(a-b)^2 + h^2 = c^2$

Najpoznatiji trapezoid je **deltoid.**

DELTOID

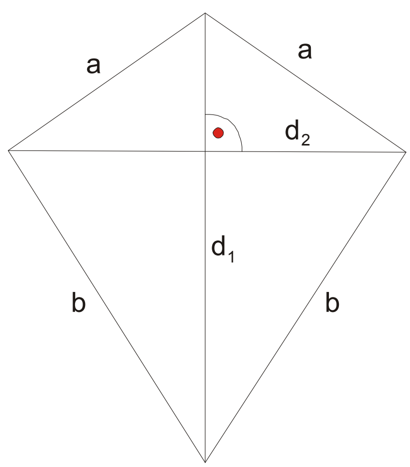
-Deltoid je trapezoid koji ima dva para jednakih uzastopnih stranica.

-Dijagonale deltoida su među sobom normalne.

-Simetrala deltoida je simetrala i njegovih uglova koje obrazuju jednake stranice

-Uglovi koje obrazuju nejednake stranice su među sobom jednaki.

-Dijagonale su istovremeno i simetrale uglova.



O = 2a + 2b $\qquad$ $P=\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$

www.matematiranje.in.rs